

## 2023年慶應義塾大学理工学部問題 5

$a, b, c$  は  $a \leqq b \leqq c$  を満たす自然数です。

$f(x) = x - \frac{1}{x}$  として  $N = f(a) + f(b) + f(c)$  とします。

$N$  が自然数となる組  $(a, b, c, N)$  を求めてください。

## 解説・解答

$(a, b) = (1, 1)$  のとき  $N = c - \frac{1}{c}$  なので自然数になりません。

$(a, b) = (1, 2)$  のとき  $N = 2 + c - \frac{1}{2} - \frac{1}{c}$  なので  $c = 2$  で  $N = 3$  です。

$(a, b) = (1, 3$  以上) のとき  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1$  なので自然数なりません。

$(a, b) = (2, 2)$  のとき  $N = 3 + c - \frac{1}{c}$  なので自然数なりません。

$(a, b) = (2, 3)$  のとき  $N = 5 + c - \frac{5}{6} - \frac{1}{c}$  なので  $c = 6$  で  $N = 10$  です。

$(a, b) = (2, 4)$  のとき  $N = 6 + c - \frac{3}{4} - \frac{1}{c}$  なので  $c = 4$  で  $N = 9$  です。

$(a, b) = (2, 5$  以上) のとき  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} < 1$  なので自然数なりません。

$(a, b) = (3, 3)$  のとき  $N = 6 + c - \frac{2}{3} - \frac{1}{c}$  なので  $c = 3$  で  $N = 8$  です。

$(a, b) = (3, 4$  以上) のとき  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$  なので自然数なりません。

$(a, b) = (4$  以上,  $b)$  のとき  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$  なので自然数なりません。

以上より  $(a, b, c, N) = (1, 2, 2, 3), (2, 3, 6, 10), (2, 4, 4, 9), (3, 3, 3, 8)$  です。