

2023年慶應義塾大学理工学部問題 5

a, b, c は $a \leq b \leq c$ を満たす自然数です。

$f(x) = x - \frac{1}{x}$ として $N = f(a) + f(b) + f(c)$ とします。

N が自然数となる組 (a, b, c, N) を求めてください。

解説・解答

$(a, b) = (1, 1)$ のとき $N = c - \frac{1}{c}$ なので自然数になりません。

$(a, b) = (1, 2)$ のとき $N = 2 + c - \frac{1}{2} - \frac{1}{c}$ なので $c = 2$ で $N = 3$ です。

$(a, b) = (1, 3 \text{ 以上})$ のとき $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1$ なので自然数になりません。

$(a, b) = (2, 2)$ のとき $N = 3 + c - \frac{1}{c}$ なので自然数になりません。

$(a, b) = (2, 3)$ のとき $N = 5 + c - \frac{5}{6} - \frac{1}{c}$ なので $c = 6$ で $N = 10$ です。

$(a, b) = (2, 4)$ のとき $N = 6 + c - \frac{3}{4} - \frac{1}{c}$ なので $c = 4$ で $N = 9$ です。

$(a, b) = (2, 5 \text{ 以上})$ のとき $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} < 1$ なので自然数になりません。

$(a, b) = (3, 3)$ のとき $N = 6 + c - \frac{2}{3} - \frac{1}{c}$ なので $c = 3$ で $N = 8$ です。

$(a, b) = (3, 4 \text{ 以上})$ のとき $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$ なので自然数になりません。

$(a, b) = (4 \text{ 以上}, b)$ のとき $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$ なので自然数になりません。

以上より $(a, b, c, N) = (1, 2, 2, 3), (2, 3, 6, 10), (2, 4, 4, 9), (3, 3, 3, 8)$ です。