2023 年慶應義塾大学環境情報学部問題 *1*

m, n は $m > n$ を満たす 100 以下の正の整数です。
ユークリッドの互除法で m, n の最大公約数を求めるとき、
余りを求める回数が最も多くなる m, n を求めてください。

解説・解答

ユークリッドの互除法を式で表すと $a_1 = m$, $a_2 = n$, $a_{n+2} = a_n - \left[\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right] a_{n+1}$
a_n が a_{n+1} で割り切れるまで繰り返します。
第 N 項で終わりなら $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{N-1}, a_N$ で $a_{N-1} = ka_N$ (k は 2 以上の整数)、
a_N が m, n の最大公約数です。

$a_{n+2} = a_n - \left[\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right] a_{n+1} \leqq a_n - a_{n-1}$ なので $a_{n+2} + a_{n+1} \leqq a_n$ です。
減り方が少ない方が回数を増やせるので $a_{n+2} + a_{n+1} = a_n$ の場合を考えます。

$b_1 = a_N, b_2 = a_{N-1}, b_3 = a_{N-2}, \cdots, b_N = a_1$ と置けば $b_n + b_{n+1} = b_{n+2}$ です。
初期値 (b_1, b_2) が小さい方が回数を増やせます。
初期値を $(b_1, b_2) = (1, 2)$ として 100 以下の項を計算します。
$b_3 = 3, b_4 = 5, b_5 = 8, b_6 = 13, b_7 = 21, b_8 = 34, b_9 = 55, b_{10} = 89$

$b_2 = 3$ の場合や $b_1 = 2$ の場合でも同じ回数になるかもしれないので調べます。
$(b_1, b_2) = (1, 3)$ のとき $b_3 = 4, b_4 = 7, b_5 = 11, b_6 = 18, b_7 = 29, b_8 = 47, b_9 = 76$
$(b_1, b_2) = (2, 4)$ のとき $b_3 = 6, b_4 = 10, b_5 = 16, b_6 = 26, b_7 = 42, b_8 = 68$

以上より、余りを求める回数が最も多くなるのは $(m, n) = (89, 55)$ です。