2023年一橋大学問題4

$a_{m,n}$を次のように定めて行きます。

$a_{1,1} = 1$,

$a_{2,1} = 2$, $a_{1,2} = 3$,

$a_{3,1} = 4$, $a_{2,2} = 5$, $a_{1,3} = 6$,

$a_{4,1} = 7$, $a_{3,2} = 8$, $a_{2,3} = 9$, $a_{1,4} = 10$,

$a_{5,1} = 11$, $a_{4,2} = 12$, $a_{3,3} = 13$, $a_{2,4} = 14$, $a_{1,5} = 15$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_{m,n} + a_{m,n+1} + a_{m+1,n} + a_{m+1,n+1} = 2023$となる自然数の組$(m, n)$を求めてください。

解説・解答

$a_{1,n}=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ です。

$a_{1+k,n-k}=a_{1,n}-k=\dfrac{n(n+1)}{2}-k \quad (k=0,1,2,3,\cdots,n-1)$ です。

よって $a_{m,n}=\dfrac{(m+n-1)(m+n)}{2}-(m-1)$ です。

$2023=a_{m,n}+a_{m,n+1}+a_{m+1,n}+a_{m+1,n+1}>4a_{m,n}>4a_{1,m+n-2}=2(m+n-2)(m+n-1)$

$2023=a_{m,n}+a_{m,n+1}+a_{m+1,n}+a_{m+1,n+1}<4a_{m+1,n+1}<4a_{1,m+n+1}=2(m+n+1)(m+n+2)$

$2\cdot 31\cdot 32=1984, \quad 2\cdot 32\cdot 33=2112$ より $31\leqq m+n\leqq 33$ です。

$m+n=31$ のとき $1\leqq m\leqq 30$

$\left\{\dfrac{30\cdot 31}{2}-(m-1)\right\}+\left\{\dfrac{31\cdot 32}{2}-m\right\}+\left\{\dfrac{31\cdot 32}{2}-(m-1)\right\}+\left\{\dfrac{32\cdot 33}{2}-m\right\}=2023$

よって $m=(465+496\cdot 2+528+2-2023)\div 4=-9$ なので条件を満たしません。

$m+n=32$ のとき $1\leqq m\leqq 31$

$\left\{\dfrac{31\cdot 32}{2}-(m-1)\right\}+\left\{\dfrac{32\cdot 33}{2}-m\right\}+\left\{\dfrac{32\cdot 33}{2}-(m-1)\right\}+\left\{\dfrac{33\cdot 34}{2}-m\right\}=2023$

よって $m=(496+528\cdot 2+561+2-2023)\div 4=23, \quad n=32-23=9$ です。

$m+n=33$ のとき $1\leqq m\leqq 32$

$\left\{\dfrac{32\cdot 33}{2}-(m-1)\right\}+\left\{\dfrac{33\cdot 34}{2}-m\right\}+\left\{\dfrac{33\cdot 34}{2}-(m-1)\right\}+\left\{\dfrac{34\cdot 35}{2}-m\right\}=2023$

よって $m=(528+561\cdot 2+595+2-2023)\div 4=56$ なので条件を満たしません。

以上より $(m,n)=(23,9)$ です。