2023 **年一橋大学問題** *3*

原点をOとする座標空間内に点$A(-3,2,0),B(1,5,0),C(4,5,1),P(x,y,z)$があります。
$\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}\right| \leqq 36$を満たすとき四面体$OABP$の体積の最大値を求めてください。

解説・解答

$\overrightarrow{OD} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{6} = \dfrac{(-3,2,0)+3(1,5,0)+2(4,5,1)}{6} = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$ と置きます。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + 3(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \\ &= (\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) - 6\overrightarrow{OP} \\ &= 6\overrightarrow{OD} - 6\overrightarrow{OP} \\ &= 6\overrightarrow{PD}\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}\right| \leqq 36$ より $\left|\overrightarrow{PD}\right| \leqq 6$ です。
よって、点 P が動ける範囲は D を中心とする半径 6 の球体です。

3 点 O, A, B の z 座標は 0 なので、三角形 OAB は xy 平面上にあります。
$\big($三角形 OAB の面積$\big) = \dfrac{|-3\cdot 5 - 2\cdot 1|}{2} = \dfrac{17}{2}$

点 P から xy 平面に下した垂線の足を H と置きます。
$DH = \big|D$ の z 座標$\big| = \dfrac{1}{3}$

線分 PH が点 D を通るときに PH の長さが最大になります
$PH \leqq PD + DH = 6 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{19}{3}$

$\big($四面体 $OABP$ の体積$\big) = \dfrac{1}{3} \cdot \big($三角形 OAB の面積$\big) \cdot PH \leqq \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{17}{2} \cdot \dfrac{19}{3} = \dfrac{323}{18}$ です。
$\big(P(\frac{4}{3}, \frac{9}{2}, \frac{19}{3})$ のとき等号成立$\big)$

以上より、四面体 $OABP$ の体積の最大値は $\dfrac{323}{18}$ です。