2023 年一橋大学問題 *1*

n は 2 以上 20 以下の整数，k は 1 以上 $n-1$ 以下の整数です。
${}_{n+2}C_{k+1} = 2({}_{n}C_{k-1} + {}_{n}C_{k+1})$ を満たす組 (n, k) を求めてください。

解説・解答

$2 \leqq n \leqq 20$, $1 \leqq k \leqq n-1$, ${}_{n+2}C_{k+1} = 2({}_nC_{k-1} + {}_nC_{k+1})$ より
$\dfrac{(n+2)^2}{(k+1)!(n-k+1)!} = 2\left\{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\right\}$ です。

両辺に $\dfrac{(k+1)!(n-k+1)}{n!}$ を掛けて $(n+2)(n+1) = 2\{(k+1)k + (n-k+1)(n-k)\}$
展開して $4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0$、式変形して $(2k-n)^2 = n+2$ にします。
$n+2$ は 4 以上 22 以下 の平方数なので $n+2 = 4, 9, 16$、よって $n = 2, 7, 14$ です。

$n = 2$ のとき $k = 1$, $(2k-2)^2 = 4$ より条件を満たす k はありません。
$n = 7$ のとき $1 \leqq k \leqq 6$, $(2k-7)^2 = 9$ より $2k-7 = \pm 3$ なので $k = 2, 5$ です。
$n = 14$ のとき $1 \leqq k \leqq 13$, $(2k-14)^2 = 16$ より $2k-14 = \pm 4$ なので $k = 5, 9$ です。

以上より $(n, k) = (7, 2), (7, 5), (14, 5), (14, 9)$ です。