

2023年浜松医科大学問題 4

三角形 ABC で $\angle BCA = \theta$, $BC = 3$, $CA = b$, $AB = c$ (b, c は素数) とします。
 $-\frac{5}{8} < \cos \theta < -\frac{7}{12}$ となる b と c の値を求めてください。

解説・解答

三角形の辺の長さなので $b > 0, c > 0$ です。

余弦定理 $c^2 = 3^2 + b^2 - 2 \cdot 3 \cdot b \cdot \cos \theta$ より $\cos \theta = \frac{9 + b^2 - c^2}{6b}$ です。

$-1 < \frac{9 + b^2 - c^2}{6b} < 0$ より $b^2 + 9 < c^2 < (b + 3)^2$ です。

$b^2 + 9 > 3^2, b^2 + 9 > b^2$ なので $c > 3, b < c < b + 3$ です。

b, c は素数 (正の整数) なので c は 5 以上の奇数で $c = b + 1, b + 2$ です。

$c = b + 1$ だと b は合成数 (4 以上の偶数) になってしまうので $c = b + 2$ です。

$-\frac{5}{8} < \frac{9 + b^2 - (b + 2)^2}{6b} < -\frac{7}{12}$ より $10 < b < 20$ です。

b は素数なので $(b, b + 2) = (11, 13), (13, 15), (17, 19), (19, 21)$ です。

c も素数なので $(b, c) = (11, 13), (17, 19)$ です。