

2023年浜松医科大学問題 1

整数係数の多項式 $f(x)$ は次の条件を満たします。

$f(0)$ は 4 で割り切れません。

方程式 $f(x) = 0$ は重解 $x = 1$ を持ちます。

方程式 $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ は異なる整数解を持ちます。

$f(4)$ を 36 で割った余りを求めてください。

解説・解答

方程式 $f(x) = 0$ は重解 $x = 1$ を持つので、
整数係数の多項式 $g(x)$ を用いて $f(x) = (x - 1)^2 g(x)$ と表せます。

方程式 $(x - 1)^2 g(x) = x(x - 1)(x - 2)$ は異なる整数解を持つので
 $x = 1$ でない整数解を $x = t$ と置きます。

$(t - 1)^2 g(t) = t(t - 1)(t - 2)$ より $(t - 1)g(t) = t(t - 2)$ です。

$t = 0, 2$ で右辺が 0 となるので $g(0) = 0$ または $g(2) = 0$ です。

$g(0) = 0$ のとき

$f(0) = (0 - 1)^2 g(0) = 0$ となり 4 で割り切れるので条件を満たしません。

$g(2) = 0$ のとき

整数係数の多項式 $h(x)$ を用いて $g(x) = (x - 2)h(x)$ と表せます。

$f(x) = (x - 1)^2 g(x) = (x - 1)^2 (x - 2)h(x)$ です。

条件より $f(0) = (0 - 1)^2 (0 - 2)h(0) = -2h(0)$ は 4 で割り切れません。

よって $h(0) = 2n + 1$ (n は整数) と置けます。

$h(x) = (x$ を含む項) $+ f(0) = (x$ を含む項) $+ 2n + 1$ です。

$x = 4$ の場合 x を含む項は 4 の倍数なので $h(4) = 4m + 2n + 1$ (m は整数) と置けます。

$f(4) = (4 - 1)^2 (4 - 2)h(4) = 18(4m + 2n + 1) = 36(2m + n) + 18$ です。

よって $f(4)$ を 36 で割った余りは 18 です。