2023 年同北海道大学文系問題 3

n は 2 以上の自然数です。
サイコロを n 回投げて出た目を順に $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ とします。
$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$ とし、
K_n の最小値を q_n とします。
$K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ の条件を求めてください。

解説・解答

サイコロの目なので $1 \leqq a_k \leqq 6\ (k=1,2,3,\cdots,n)$ です。
よって $1-a_1 \leqq 0,\ a_n-6 \leqq 0$ です。

三角不等式 $|x_1|+|x_2| \geqq |x_1+x_2|$ { 実数 x_1, x_2が同符号のとき等号成立 } を繰返し用いて
$K_n = |1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$
$\geqq |1-a_1+a_1-a_2+a_2-a_3+\cdots+a_{n-1}-a_n+a_n-6| = |1-6| = 5$
{ $1-a_1 \leqq 0,\ a_k-a_{k+1} \leqq 0\ (k=1,2,3,\cdots,n-1),\ a_n-6 \leqq 0$ のとき等号成立 }
よって $q_n=5$ です。

以上より、$K_n=q_n$ となる条件は $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq 6$ です。