2023 **年同北海道大学文系問題** *1*

$P(x)$ を x についての整式とし、
$P(x)P(-x)=P(x^2)$ は x についての恒等式であるとします。
次数が 2 である $P(x)$ を求めてください。

解説・解答

$P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ と置き、$P(x)P(-x)=P(x^2)$ の両辺を比べます。
x^4 の係数より $a^2=a$、定数項より $c^2=c$ なので $a=1,\ c=0,1$ です。
よって $P(x)=x^2+bx,\ x^2+bx+1$ です。

$x=-1$ を代入すると $P(-1)P(1)=P(1)$ です。
左辺にまとめると $P(1)\{P(-1)-1\}=0$ なので $P(-1)=1$ または $P(1)=0$ です。

$P(x)=x^2+bx,\ P(-1)=1$ のとき
$P(-1)=1-b=1$ より $b=0$ なので $P(x)=x^2$ です。
$P(x)P(-x)=x^2(-x)^2=x^4=P(x^2)$

$P(x)=x^2+bx,\ P(1)=0$ のとき
$P(1)=1+b=0$ より $b=-1$ なので $P(x)=x^2-x$ です。
$P(x)P(-x)=(x^2-x)(x^2+x)=x^4-x^2=P(x^2)$

$P(x)=x^2+bx+1,\ P(-1)=1$ のとき
$P(-1)=1-b+1=1$ より $b=1$ なので $P(x)=x^2+x+1$ です。
$P(x)P(-x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x^2+1)^2-x^2=x^4+x^2+1=P(x^2)$

$P(x)=x^2+bx+1,\ P(1)=0$ のとき
$P(1)=1+b+1=0$ より $b=-2$ なので $P(x)=x^2-2x+1$ です。
$P(x)P(-x)=(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)=(x^2+1)^2-(2x)^2=x^4-2x^2+1=P(x^2)$

以上より $P(x)=x^2,\ x^2-x,\ x^2+x+1,\ x^2-2x+1$ です。