2023 **年岐阜大学医学部問題** 4

e は自然対数の底、n は自然数です。
$f(x)=x^2e^x$ とし、$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とします。
曲線 $y=f^{(n)}(x)$ と x 軸との共有点の個数を求めてください。

解説・解答

$f^{(1)}(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x$
$f^{(2)}(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$
$f^{(3)}(x) = (2x+4)e^x + (x^2+4x+2)e^x = (x^2+6x+6)e^x$
$f^{(4)}(x) = (2x+6)e^x + (x^2+6x+6)e^x = (x^2+8x+12)e^x$
$f^{(5)}(x) = (2x+8)e^x + (x^2+8x+12)e^x = (x^2+10x+20)e^x$

$f^{(n)}(x) = \{x^2+2nx+(n-1)n\}e^x$ と推定できます。

自然数 k で $f^{(k)}(x) = \{x^2+2kx+(k-1)k\}e^x$ とすると
$f^{(k+1)}(x) = \{2x+2k\}e^x + \{x^2+2kx+k(k-1)\}e^x = \{x^2+2(k+1)x+k(k+1)\}e^x$ なので
数学的帰納法により、全ての自然数 n で $f^{(n)}(x) = \{x^2+2nx+(n-1)n\}e^x$ です。

曲線 $y = f^{(n)}(x)$ と x 軸との共有点の個数を求めるには
方程式 $\{x^2+2nx+(n-1)n\}e^x = 0$ の異なる実数解の個数を求めれば良いです。
二次方程式 $x^2+2nx+(n-1)n = 0$ の判別式は $D/4 = n^2-(n-1)n = n > 0$ です。
$e^x > 0$ なので、異なる実数解の個数は 2 個です。

以上より、曲線 $y = f^{(n)}(x)$ と x 軸との共有点は 2 個です。