2023 年岐阜大学医学部問題 2

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1\,,\quad a_{n+1} = \left(\sqrt{2}-1\right)a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。
整数 $p_n\,,\,q_n$ を用いて $a_n = p_n + \sqrt{2}\,q_n$ と表せます。$p_n\,,\,q_n$ を求めてください。

解説・解答

方程式 $x=\left(\sqrt{2}-1\right)x+2$ を解くと $x=2+\sqrt{2}$ なので
$a_{n+1}=\left(\sqrt{2}-1\right)a_n+2$ は $a_{n+1}-2-\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(a_n-2-\sqrt{2}\right)$ に式変形できます。
よって $a_n-2-\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-1}\left(a_1-2-\sqrt{2}\right)$ です。
ゆえに
$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{2}-1\right)^{n-1}\left(1-2-\sqrt{2}\right)+2+\sqrt{2} \\ &= -\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-2}\left\{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}+2+\sqrt{2} \text{ です。} \\ &= -\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-2}+2+\sqrt{2} \text{ です。}\end{aligned}$$

$-\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-2}$ を展開したときに
$\sqrt{2}$ を含まない部分は $\dfrac{-\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-2}-\left(-\sqrt{2}-1\right)^{n-2}}{2}$
$\sqrt{2}$ を含む部分は $\dfrac{-\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-2}+\left(-\sqrt{2}-1\right)^{n-2}}{2}$ です。

以上より
$$p_n=\frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-2}-\left(-\sqrt{2}-1\right)^{n-2}}{2}+2$$
$$q_n=\frac{-\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-2}+\left(-\sqrt{2}-1\right)^{n-2}}{2\sqrt{2}}+1 \text{ です。}$$