2022 年早稲田大学理工学部問題 2

p, q は相異なる素数です。
$f(x)$ は x^2 の係数が 1 である整数係数の 2 次式であり、
$f(1) = pq$ を満たし、方程式 $f(x) = 0$ が整数解を持ちます。
この条件を満たす $f(x)$ は n 通りあり、それらを $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x)$ とします。
$2n$ 次方程式 $f_1(x)f_2(x)f_3(x)\cdots f_n(x) = 0$ の相異なる解の総和 S を求めてください。

解説・解答

α, β を $\alpha \leqq \beta$ を満たす整数として、$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ と置きます。
$f(1) = (1-\alpha)(1-\beta) = (\alpha-1)(\beta-1) = pq$ より (ここでは $p < q$ とします)
$(\alpha-1, \beta-1) = (-pq, -1), (-q, -p), (1, pq), (p, q)$ です。
$-pq, -1, -q, -p, 1, pq, p, q$ は相異なる整数です。
よって 4 通りの 2 次式があり、8 個の相異なる整数解があります。
$S - 8 = -pq - 1 - q - p + 1 + pq + p + q = 0$ なので $S = 8$ です。