2022 年早稲田大学教育学部問題 *3*

座標平面上で点 $P(2, 2\sqrt{3})$ を中心とし半径 1 の円を C、
2 点 $A(0,1), B(s,t)$ を通る直線に接している中心点 $O(0,0)$ の円を C_1、
円周上に 3 点 O, A, B がある円を C_2 とします。
点 B が円 C 上を動くとき、
C_1, C_2の面積をそれぞれ D_1, D_2 とし、積 D_1D_2 の取り得る値の範囲を求めてください。

解説・解答

$OA=1\,,\quad OP=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3}\,)^2}=4$

点 O から 2 点 A, B を通る直線に下した垂線の足を H とし、
$\angle OBA=\angle OBH=\theta$ とします。
円 C, C_1, C_2 の半径をそれぞれ r, r_1, r_2 とします。

直角三角形 OBH で $r_1=OH=OB\sin\theta$ です。

三角形 OAB で正弦定理より $r_2=\dfrac{OA}{2\sin\theta}=\dfrac{1}{2\sin\theta}$ です。

$D_1D_2=\pi {r_1}^2\cdot\pi {r_2}^2=\pi\Big(OB\sin\theta\Big)^2\cdot\pi\Big(\dfrac{1}{2\sin\theta}\Big)^2=\dfrac{\pi^2\cdot OB^2}{4}$

直線 OB が P を通るとき、線分 OB の長さが最大・最小です。
$3=OP-r\leqq OB\leqq OP+r=5$ です。

以上より $\dfrac{9\pi^2}{4}\leqq D_1D_2\leqq\dfrac{25\pi^2}{4}$ です。