2022 年早稲田大学教育学部問題 2

サイコロを n 回投げて出た目の積を S とします。
S の正の約数が 4 個となる確率 P_n を求めてください。

解説・解答

サイコロの目のは $1, 2, 3, 4, 5, 6$ でそれらの素因数は $2, 3, 5$ です。
よって $S = 2^a 3^b 5^c$ $(a, b, c$ は 0 以上の整数$)$ と表せて、
S の正の約数は $(a+1)(b+1)(c+1)$ 個です。
約数が 4 個なのは $S = 2^3,\ 3^3,\ 5^3,\ 2 \cdot 3 = 6,\ 2 \cdot 5,\ 3 \cdot 5$ です。

$n = 1$ のとき、S の正の約数が 4 個となるのは 6 の目が出たときです。
よって $P_1 = \dfrac{1}{6}$ です。

$n = 2$ のとき、S の正の約数が 4 個となる目は次の 5 パターンです。
$2 \cdot 3,\quad 2 \cdot 5,\quad 3 \cdot 5,\quad 2 \cdot 4,\quad 1 \cdot 6$
よって $P_2 = \dfrac{5 \cdot 2!}{6^2} = \dfrac{5}{18}$ です。

$n \geqq 3$ のとき、S の正の約数が 4 個となる目は次の 8 パターンです。
$1^{n-3} \cdot 2^3,\ 1^{n-3} \cdot 3^3,\ 1^{n-3} \cdot 5^3,\ 1^{n-2} \cdot 2 \cdot 3,\ 1^{n-2} \cdot 2 \cdot 5,\ 1^{n-2} \cdot 3 \cdot 5,\ 1^{n-2} \cdot 2 \cdot 4,\ 1^{n-1} \cdot 6$
よって $P_n = \dfrac{{}_nC_3 \cdot 3 + {}_nC_2 \cdot 2! \cdot 4 + {}_nC_1}{6^n} = \dfrac{n(n^2 + 5n - 4)}{2 \cdot 6^n}$ です。
この式は $n = 1, 2$ でも成立しています。

以上より $P_n = \dfrac{n(n^2 + 5n - 4)}{2 \cdot 6^n}$ です。