2022 年早稲田大学商学部問題 *1*

$a_1 = a\,,\ a_{n+1} = {a_n}^2 - 2a_n - 3\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定めます。
全ての正整数 n で $a_n \leqq 10$ となるような実数 a の最小値を求めてください。

解説・解答

$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ と置けば $a_{n+1} = f(a_n)$ です。
$f(x)$ は $x < 1$ で単調減少、$1 < x$ で単調増加です。

$x = f(x)$ を解くと $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ です。

$\alpha = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} = 3.79\cdots$, $\beta = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\cdots$ と置けば $\alpha = f(\alpha)$, $\beta = f(\beta)$ です。

$\alpha = f(x)$ を解くと $x = \alpha, \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$,　$\beta = f(x)$ を解くと $x = \beta, \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ です。

$\gamma = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} = -1.79\cdots$ と置けば $\alpha = f(\gamma)$ です。

$a_1 = a = \gamma$ のとき
$a_2 = f(a_1) = f(\gamma) = \alpha$,　$a_3 = f(a_2) = f(\alpha) = \alpha$,　$\cdots\cdots$
2 以上の整数 n で $a_n = \alpha$ なので、全ての正整数 n で $a_n \leqq 10$ です。

$a_1 = a < \gamma$ のとき
$f(x)$ は $x < 1$ で単調減少なので $a_2 = f(a_1) > f(\gamma) = \alpha$ です。
ある正整数 k で $a_k > \alpha$ なら
$a_{k+1} - \alpha = f(a_k) - f(\alpha) = (a_k + \alpha - 2)(a_k - \alpha) > (2\alpha - 2)(a_k - \alpha) > 5(a_k - \alpha)$
よって $a_n > 5^{n-2}(a_2 - \alpha) + \alpha$ $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ です。
$a_2 - \alpha > 0$ なので $a_n > 10$ となる n が存在します。

以上より、条件を満たす最小値は $a = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$ です。