

2022年早稲田大学商学部問題1

実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 3$ を満たすとき、
 $x - y - xy$ の最大値を求めてください。

解説・解答

$X = x - y, Y = -xy$ と置きます。

実数解 $t = x, -y$ を持つ二次方程式 $t^2 - Xt + Y = 0$ を考えます。

判別式 $X^2 - 4Y \geq 0$ より $Y \leq \frac{X^2}{4}$ です。

$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = X^2 - 2Y \leq 3$ より $\frac{X^2 - 3}{2} \leq Y$ です。

$\frac{X^2 - 3}{2} \leq Y \leq \frac{X^2}{4}$ なので $\frac{X^2 - 3}{2} \leq \frac{X^2}{4}$ より $-\sqrt{6} \leq X \leq \sqrt{6}$ です。

$x - y - xy = X + Y \leq X + \frac{X^2}{4} = \frac{(X + 2)^2 - 4}{4} \leq \frac{(\sqrt{6} + 2)^2 - 4}{4} = \sqrt{6} + \frac{3}{2}$

以上より $(x, y) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2})$ のとき最大値 $\sqrt{6} + \frac{3}{2}$ です。