2022 年早稲田大学商学部問題 3

座標空間で $C_1 : x^2 + y^2 = 1\ ,\ C_2 : (y-1)^2 + z^2 = 1$ とします。
全ての頂点が $C_1 \cup C_2$ 上にある正四面体の 1 辺の長さを求めてください。

解説・解答

C_1は点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 1 で xy 平面上の円 です。
C_2は点 $(0,1,0)$ を中心とする半径 1 で yz 平面上の円 です。
C_1と C_2 の位置関係より、正四面体の 3 つの頂点が片方の円に乗ることはありません。
C_1に 2 つの頂点, C_2にも 2 つの頂点が乗ります。

位置関係と対称性を考慮すれば、正四面体の 4 つの頂点は次のように表せます。
$A(\cos\alpha, \sin\alpha, 0), B(-\cos\alpha, \sin\alpha, 0), C(0, 1+\sin\beta, \cos\beta), D(0, 1+\sin\beta, -\cos\beta)$
$$\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

正四面体の辺の長さは全て等しいので
$AB = CD$ より $2\cos\alpha = 2\cos\beta$なので $\beta = \pm\alpha$ です。

$\beta = \alpha$ のとき $C(0, 1+\sin\alpha, \cos\alpha), D(0, 1+\sin\alpha, -\cos\alpha)$
$AB^2 = AC^2$より $(2\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha$ なので $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ です。
よって $AB = 2\cos\alpha = \sqrt{2}$ です。

$\beta = -\alpha$ のとき $C(0, 1-\sin\alpha, \cos\alpha), D(0, 1-\sin\alpha, -\cos\alpha)$
$AB^2 = AC^2$より $(2\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha + (2\sin\alpha - 1)^2 + \cos^2\alpha$ なので $\sin\alpha = \frac{2\pm\sqrt{10}}{6}$ です。
$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(\frac{2\pm\sqrt{10}}{6})^2} = \sqrt{\frac{11\mp2\sqrt{10}}{18}} = \frac{\sqrt{10}\mp1}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{5}\mp\sqrt{2}}{6}$
よって $AB = 2\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}\mp\sqrt{2}}{3}$ です。

以上より、正四面体の 1 辺の長さは $\sqrt{2},\ \dfrac{2\sqrt{5}\mp\sqrt{2}}{3}$ です。