*2022* 年東京大学文系問題 *3*

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 4,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + n(n+2)\ (n = 1, 2, 3)$ で定めます。
$a_{2022}$, $a_{2023}$, $a_{2024}$ の最大公約数 $G$ を求めてください。

解説・解答

漸化式 $a_{n+1} = {a_n}^2 + n(n+2)$ により
$a_{2023} - {a_{2022}}^2 = 2022 \cdot 2024 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 337 = A$
$a_{2024} - {a_{2023}}^2 = 2023 \cdot 2025 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17^2 = B$

$a_{2022}$ も $a_{2023}$ も $a_{2024}$ も $G$ の倍数なので、$A$ も $B$ も $G$ の倍数です。
よって $A, B$ の最大公約数 3 も $G$ の倍数です。
ゆえに $G = 1, 3$ に限定されます。

$a_n$ を 3 で割った余りを $b_n$ とし、$b_n$ を計算します。
$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0,\ b_4 = 0,\ b_5 = 0,\ b_6 = 2,\ b_7 = 1,\ b_8 = 1,\ b_9 = 0,\ \cdots$
数列 $\{b_n\}$ は 1, 1, 0, 0, 0, 2 の繰り返しなので、
$k$ を自然数として $b_{6k-5} = b_{6k-4} = 1,\ b_{6k-3} = b_{6k-2} = b_{6k-1} = 0,\ b_{6k} = 2$ です。

$2022 = 6 \cdot 337$ より $b_{2022} = 2$ なので $a_{2022}$ は 3 の倍数ではありません。
よって $G \neq 3$ です。

以上より $G = 1$ です。