2022 年東京工業大学問題 2

3 つの自然数 a, b, c の最大公約数が 1 であるとき、
$a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となり得る自然数を求めてください。

解説・解答

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3$ の最大公約数は
$a+b+c,\ 2(ab+bc+ca),\ 3abc$ の最大公約数と同じです。

$a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$ が約数 p (p は素数) を持つとすれば
$a+b+c=ps,\ ab+bc+ca=qs,\ abc=rs$ (p,q,r は自然数) と置けます。
$abc=rs$ より a,b,c の少なくとも 1 つは s の倍数です。
a,b,c の対称式なので a が s の倍数のときだけ調べれば良いです。
a が s の倍数のとき $bc=qs-a(b+c)$ より b,c の少なくとも 1 つは s の倍数です。
　b が s の倍数なら $c=ps-a-b$ より c は s の倍数です。
　c が s の倍数なら $b=ps-a-c$ より b は s の倍数です。
a,b,c が約数 p を持ってしまうので「a,b,c の最大公約数が 1」に矛盾します。
よって $a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$ の最大公約数は 1 です。

$a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$ の最大公約数が 1 なので
$ab+bc+ca$ が 2 の倍数でないとき $a+b+c$ と abc は 2 の倍数でも良いです。
abc が 3 の倍数でないとき $a+b+c$ と $ab+bc+ca$ は 3 の倍数でも良いです。
よって $a+b+c,\ 2(ab+bc+ca),\ 3abc$ の最大公約数の候補は 1, 2, 3, 6 に限定されます。

$a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3$ の最大公約数は
$(a,b,c)=(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,1,4)$ のときそれぞれ $3,2,1,6$ です。

以上より、最大公約数となり得る自然数は 1, 2, 3, 6 です。