2022 年千葉問題 *9*

次の条件を満たす最大の実数 c を求めてください。
条件：$0 < r < c$ のときは $f(x) = x + \dfrac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ がつねに増加します。

解説・解答

$f(x)=x+\dfrac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=x+r(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x)=1-\dfrac{r}{2}(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\sin x\cos x=1-r(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}\sin x\cos x$

$\sin x\cos x \leqq 0$ のとき
$f'(x)=1-r(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}\sin x\cos x>0$ です。

$\sin x\cos x>0$ のとき $\sin^2 x=t$ と置けば
$f'(x)=1-r\sqrt{(1+\sin^2 x)^{-3}\sin^2 x\cos^2 x}=1-r\sqrt{(1+t)^{-3}t(1-t)}$ です。

$0<t<1$ で $g(t)=(1+t)^{-3}t(1-t)=(1+t)^{-3}(t-t^2)$ と置きます。
$g'(t)=-3(1+t)^{-4}(t-t^2)+(1+t)^{-3}(1-2t)=(1+t)^{-4}(t^2-4t+1)$

$t^2-4t+1=0$ を解くと $x=2\pm\sqrt{3}$ です。
$g(t)$ は $0<t<2-\sqrt{3}$ で増加, $t=2-\sqrt{3}$ で極大, $2-\sqrt{3}<t<1$ で減少 です。

$g\bigl(2-\sqrt{3}\bigr)=\dfrac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(3-\sqrt{3})^3}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}^3(\sqrt{3}-1)^2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})}=\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$

$f'(x)=1-r\sqrt{g(t)}\geqq 1-r\sqrt{g\bigl(2-\sqrt{3}\bigr)}=1-\dfrac{r}{\sqrt{6\sqrt{3}}}>0$ です。

よって $0<r<\sqrt{6\sqrt{3}}$ です。

以上より、条件を満たす最大の実数 c は $\sqrt{6\sqrt{3}}$ です。