

2022年千葉問題 4

0 以上 9999 以下の整数  $N$  を 4 桁で表します。

(3 桁以下の場合は上の位を 0 とみなして 4 桁で表します。)

$N$  の千の位と十の位を入れ換え、百の位と一の位を入れ換えて作った数を  $M$  とします。

$3M$  は  $2N + 3$  と等しくなることを示してください。

## 解説・解答

$N = 100a + b$  ( $a, b$  は 0 以上 99 以下の整数) と置きます。

千の位と十の位を入れ換え、百の位と一の位を入れ換えた数なので  $M = 100b + a$  です。

$3M = 2N + 3$  を満たすとすると、

$3(100b + a) = 2(100a + b) + 3$  より  $-197a + 298b = 3$  です。

ユークリッド互除法を使います。

$298 - 197 \cdot 2 = -96$ ,  $197 - 96 \cdot 2 = 5$ ,  $96 - 5 \cdot 19 = 1$  なので  
197 と 298 は互いに素です。

$$\begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 3 = (96 - 5 \cdot 19) \cdot 3 \\ &= 96 \cdot 3 - 5 \cdot 57 = 96 \cdot 3 - (197 - 96 \cdot 2) \cdot 57 \\ &= -197 \cdot 57 + 96 \cdot 117 = -197 \cdot 57 - (298 - 197 \cdot 2) \cdot 117 \\ &= -197 \cdot (-177) + 298 \cdot (-117) \end{aligned}$$

$-197a + 298b = 3$  から  $-197 \cdot (-177) + 298 \cdot (-117) = 3$  を引いて  
 $-197(a + 177) + 298(b + 117) = 0$  です。

197 と 298 は互いに素なので  $a + 177 = 298c$  ( $c$  は整数) と置けます。

$0 \leq a \leq 99$  なので  $177 \leq 298c \leq 276$  ですが、これを満たす整数  $c$  はありません。

以上より、 $3M$  は  $2N + 3$  と等しくなりません。