

2022年千葉問題4

0以上9999以下の整数 N を4桁で表します。

(3桁以下の場合は上の位を0とみなして4桁で表します。)

N の千の位と十の位を入れ換え、百の位と一の位を入れ換えて作った数を M とします。

$3M$ は $2N + 3$ と等しくならないことを示してください。

解説・解答

$N = 100a + b$ (a, b は 0 以上 99 以下の整数) と置きます。
千の位と十の位を入れ換え、百の位と一の位を入れ換えた数なので $M = 100b + a$ です。

$3M = 2N + 3$ を満たすとすると、
 $3(100b + a) = 2(100a + b) + 3$ より $-197a + 298b = 3$ です。

ユークリッド互除法を使います。
 $298 - 197 \cdot 2 = -96$, $197 - 96 \cdot 2 = 5$, $96 - 5 \cdot 19 = 1$ なので
197 と 298 は互いに素です。

$$\begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 3 = (96 - 5 \cdot 19) \cdot 3 \\ &= 96 \cdot 3 - 5 \cdot 57 = 96 \cdot 3 - (197 - 96 \cdot 2) \cdot 57 \\ &= -197 \cdot 57 + 96 \cdot 117 = -197 \cdot 57 - (298 - 197 \cdot 2) \cdot 117 \\ &= -197 \cdot (-177) + 298 \cdot (-117) \end{aligned}$$

$-197a + 298b = 3$ から $-197 \cdot (-177) + 298 \cdot (-117) = 3$ を引いて
 $-197(a + 177) + 298(b + 117) = 0$ です。
197 と 298 は互いに素なので $a + 177 = 298c$ (c は整数) と置けます。
 $0 \leqq a \leqq 99$ なので $177 \leqq 298c \leqq 276$ ですが、これを満たす整数 c はありません。

以上より、 $3M$ は $2N + 3$ と等しくなりません。