*2022* 年千葉問題 *1*

正 12 角形の頂点を時計回りに $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{12}$ とします。
白球 2 個と黒球 4 個が入った袋があります。
最初は頂点 $A_1$ に $P$ があり、次の操作で $P$ が頂点を移動します。
　袋から 1 つ球を取り出し (取り出した球は袋に戻しません)、　サイコロを振ります。
　取り出した球が白なら時計回りに、黒なら反時計回りに出た目の数だけ進みます。
この操作を $n$ 回行った後の $P$ の位置を $P_n$ とします。
三角形 $P_1P_2P_3$ が正三角形となる確率を求めてください。

解説・解答

正三角形なのは三角形 $P_kP_{k+4}P_{k+8}$ $(k=1,2,3,4)$ です。
2 回目と 3 回目が同じ方向に $4,4$ と進めば正三角形になります。

$n$ 回目に取り出した球の色とサイコロの出た目を $X_n$ とします。
正三角形となるのは次の $3\cdot 6=18$ 通りです。
$(X_1,X_2,X_3)=($白 $m,$ 黒 $4,$ 黒 $4),($黒 $m,$ 白 $4,$ 白 $4),($黒 $m,$ 黒 $4,$ 黒 $4)$ $(m=1,2,3,4,5,6)$

$(X_1,X_2,X_3)=($白 $m,$ 黒 $4,$ 黒 $4)$ $(m=1,2,3,4,5,6)$ の確率は
$\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{6}{6}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{540}$ です。

$(X_1,X_2,X_3)=($黒 $m,$ 白 $4,$ 白 $4)$ $(m=1,2,3,4,5,6)$ の確率は
$\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{540}$ です。

$(X_1,X_2,X_3)=($黒 $m,$ 黒 $4,$ 黒 $4)$ $(m=1,2,3,4,5,6)$ の確率は
$\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{540}$ です。
以上より、求める確率は $\frac{3}{540}+\frac{1}{540}+\frac{3}{540}=\frac{7}{540}$ です。