2022 年東北大学理系問題 *3*

n は正の整数です。
極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$ を求めてください。

解説・解答

$0 \leqq x \leqq 1$ で $f(x)=\sqrt{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{2}}-1$ とします。
$f'(x)=\dfrac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{2}>0$,　$f''(x)=\dfrac{-(1+x)^{-\frac{3}{2}}}{4}<0$

$y=f(x)$ の $x=0$ での接線の方程式は $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ なので $y=\dfrac{x}{2}$ です。
$f''(x)<0$ より $y=f(x)$ のグラフは上に凸なので接線以下です。
よって　$f(x)=\sqrt{1+x}-1 \leqq \dfrac{x}{2}$ です。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{x}{2+(\sqrt{1+x}-1)}\geqq\frac{x}{2+\frac{x}{2}}=\frac{2x}{4+x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)>\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{2k}{n^2}}{4+\frac{k}{n^2}}>\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{2k}{n}}{4+\frac{n}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{2x}{4}dx=\frac{1}{4}$$

はさみうちの原理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$ です。