2022 年大阪大学理問題 *2*

$\cos\dfrac{2\pi}{7}$ は無理数であることを証明してください。

解説・解答

$\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ と置きます。 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{1}{2} < \cos\alpha < 1$ です。

$\cos 3\alpha = \cos\dfrac{6\pi}{7} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{7}\right) = \cos\dfrac{8\pi}{7} = \cos 4\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

よって $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$ です。
整理して $(\cos\alpha - 1)(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1) = 0$ です。
$\cos\alpha \neq 1$ なので $8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 = 0$ です。

有理数だとしたら $\cos\alpha = \dfrac{n}{m}$ $(m, n$ は互いに素な正整数$)$ と表せます。
$\dfrac{1}{2} < \dfrac{n}{m} < 1$ より $n < m < 2n$ なので $n \geqq 2$, $m \geqq 3$ です。
$8\left(\dfrac{m}{n}\right)^3 + 4\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 - 4\left(\dfrac{m}{n}\right) - 1 = 0$ より $n^3 = m(8m^2 + 4mn - 4n^2)$ です。
よって n^3 は m の倍数です。
m, n は互いに素なので条件を満たす m, n はありません。

以上より $\cos\dfrac{2\pi}{7}$ は無理数です。