

2022年大阪大学文系問題 2

n は 2 以上の自然数です。

サイコロを n 回振り、出た目の最大公約数が素数でない確率を求めてください。

解説・解答

サイコロの目で素数なのは 2, 3, 5 です。

最大公約数が 2 のとき

2, 4, 6 だけが出る場合から、4 だけ、6 だけの場合を除けば良いです。

確率は $p_2 = \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$ です。

最大公約数が 3 のとき

3, 6 だけが出る場合から、6 だけの場合を除けば良いです。

確率は $p_3 = \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n$ です。

最大公約数が 5 のとき

5 だけが出る場合です。

確率は $p_5 = \left(\frac{1}{6}\right)^n$ です。

最大公約数が素数でない確率は

$1 - p_2 - p_3 - p_5 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n$ です。