2022 年名古屋大学理系問題 3

複素数平面上に正六角形 $OABCDE$ (O は原点, 反時計回りに $OABCDE$) があります。
α, β, γ は互いに異なる 0 でない複素数で $0 \leqq \arg(\frac{\beta}{\alpha}) \leqq \pi$,
$4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0, \quad 2\gamma^2 - (3\alpha + \beta + 2)\gamma + (\alpha + 1)(\alpha + \beta) = 0$ を満たします。
複素数 z に対応する複素数平面上の点を $P(z)$ とします。
$P(\alpha), P(\beta), P(\gamma)$ が正六角形 $OABCDE$ の頂点となる組 (α, β, γ) を求めてください。

解説・解答

$4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\beta^2-2\alpha\beta+4\alpha^2=0$ より $\beta=(1\pm\sqrt{3}i)\alpha$ です。
$0\leqq\arg(\frac{\beta}{\alpha})\leqq\pi$ なので $\beta=(1+\sqrt{3}i)\alpha=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\alpha$ です。
$OP(\alpha)$ を 2 倍して $\frac{\pi}{3}$ 回転したのが $OP(\beta)$ なので $P(\alpha)=A,\ P(\beta)=C$ です。

$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=\{\gamma-(\alpha+1)\}\{2\gamma-(\alpha+\beta)\}=0$ より
$\gamma=\alpha+1,\ \frac{\alpha+\beta}{2}$ です。
$P(\frac{\alpha+\beta}{2})$ は線分 AC の中点なので正六角形 $OABCDE$ の頂点になりません。
よって $\gamma=\alpha+1$ です。線分 $AP(\gamma)$ は実数軸と平行で長さ 1 です。

$P(\gamma)=B$ のとき　$AB=1,$ 線分 AB と線分 OC は実数軸 に平行です。
よって、線分 OC は実数軸上にあるので $OC=2AB=2$ より $\beta=2$ です。
$\alpha=\frac{\beta}{1+\sqrt{3}i}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad\gamma=\alpha+1=\frac{3-\sqrt{3}i}{2}$ です。

$P(\gamma)=D$ のとき　$AD=1,$ 線分 AD と線分 OE と実数軸 は平行です。
$OA=\frac{AD}{2}=\frac{1}{2}\ \angle AOE=\frac{2\pi}{3}$ より $\alpha=\frac{1}{2}\big(\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})\big)=\frac{-1-\sqrt{3}i}{4}$ です。
$\beta=(1+\sqrt{3}i)\alpha=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad\gamma=\alpha+1=\frac{3-\sqrt{3}i}{4}$ です。

$P(\gamma)=E$ のとき　$AE=1,$ 線分 AE と実数軸は平行, 線分 OC は虚数軸上 です。
三角形 $OAP(\frac{\alpha+\gamma}{2})$ は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形なので $OA=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{AE}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ です。
$OC=2OA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ なので $\beta=-\frac{2\sqrt{3}}{3}i$ です。
$\alpha=\frac{\beta}{1+\sqrt{3}i}=\frac{-3-\sqrt{3}i}{6},\quad\gamma=\alpha+1=\frac{3-\sqrt{3}i}{6}$ です。

以上より
$\big(\alpha,\beta,\gamma\big)=\big(\frac{1-\sqrt{3}i}{2},2,\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\big),\big(\frac{-1-\sqrt{3}i}{4},\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\frac{3-\sqrt{3}i}{4}\big),\big(\frac{-3-\sqrt{3}i}{6},-\frac{2\sqrt{3}i}{3},\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\big)$ です。