

2022年京都大学理系問題 3

n は自然数です。

$n^2 + 2$, $n^4 + 2$, $n^6 + 2$ の最大公約数を求めてください。

解説・解答

$n^4 + 2 = (n^2 + 2)(n^2 - 2) + 6$ なので、
 $n^4 + 2$ と $n^2 + 2$ の最大公約数は $n^2 + 2$ と 6 の最大公約数です。

$n^6 + 2 = (n^2 + 2)(n^4 - 2n^2 + 4) - 6$ なので、
 $n^6 + 2$ と $n^2 + 2$ の最大公約数は $n^2 + 2$ と 6 の最大公約数です。

以上より $n^2 + 2$ と 6 の最大公約数を求めれば良いです。

n を 6 で割った余りを r として、
 $n = 6m + r$ (m は整数, r は 0 以上 5 以下の整数) と置きます。

$n^2 + 2 = (6m + r)^2 + 2 = 6(6m^2 + 2mr) + r^2 + 2$
よって 6 と $r^2 + 2$ の最大公約数を求めれば良いです。

$r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ のときそれぞれ $r^2 + 2 = 2, 3, 6, 11, 18, 27$ なので、
最大公約数は $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ のときそれぞれ 2, 3, 6, 1, 6, 3 です。