2022 年九州大学理系問題 *3*

$n^4 = 210m^2 + 1$ を満たす自然数の組 (m, n) を 1 つ求めてください。

解説・解答

$n^4 = 210m^2 + 1$ より $(n^2-1)(n^2+1) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot m^2$ です。

$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot m^2$ は偶数なので $(n^2-1)(n^2+1)$ も偶数です。
n^2-1, n^2+1 の差は 2 なので偶奇が一致するから両方とも偶数です。
連続する偶数なので $(n^2-1)(n^2+1)$ は 2^3 の倍数です。
よって m^2 は 2^2 の倍数なので m は偶数です。

$n = 3a + r$ (a は整数, $r = 0, 1, 2$) と置きます。
$n^2 + 1 = (3a+r)^2 + 1 = 3(3a^2 + 2ar) + r^2 + 1$ です。
$r = 0, 1, 2$ のとき $r^2 + 1$ はそれぞれ $1, 2, 5$ です。
よって $n^2 + 1$ は 3 の倍数ではありません。

$n = 7b + s$ (b は整数, $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) と置きます。
$n^2 + 1 = (7b+s)^2 = 7(7b^2 + 2bs) + s^2 + 1$ です。
$s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のとき $s^2 + 1$ はそれぞれ $1, 2, 5, 10, 17, 26, 37$ です。
よって $n^2 + 1$ は 7 の倍数ではありません。

以上から $n^2 - 1$ は $2\cdot 3\cdot 7 = 42$ の倍数です。

$m = 2c,\ \ n^2 - 1 = 42d$ (c, d は整数) と置きます。
$42d(42d+2) = 210\cdot(2c)^2$ より $d(21d+1) = 10c^2$ です。

例えば $d = 10k$ (k は整数) なら $10k(210k+1) = 10c^2$ より $c^2 = k(210k+1)$ です。
$k = 1, 2, 3, 4, \cdots$ のときそれぞれ $c^2 = 211,\ \ 2\cdot 421,\ \ 3\cdot 631,\ \ 4\cdot 841 = 58^2, \cdots$ です。

$k = 4,\ c = 58$ のとき
$m = 2c = 2\cdot 58 = 116,\ \ \ n^2 = 42d + 1 = 42\cdot 10\cdot 4 + 1 = 1681 = 41^2$ です。

以上より $(m, n) = (116, 41)$ は条件を満たす 1 組です。