2022 年九州大学文系問題 3

x についての 4 次方程式 $x^4+6x^3-kx^2+2kx-64=0$ が
整数解 2 個と実部・虚部が共に整数である虚数解を持つような実数 k を求めてください。

解説・解答

$x^4+6x^3-kx^2+2kx-64=(x-2)\{x^3+8x^2+(16-k)x+32\}=0$
よって、整数解の 1 つは $x=2$ です。

x についての 3 次方程式 $x^3+8x^2+(16-k)x+32=0$ が
解 $x=a\pm bi,\ c\ (b\neq 0,\ a,b,c$ は整数$)$ を持つ実数 k を求めれば良いです。

3 次方程式の解と係数の関係を使います。
定数項部分は $(a+bi)(a-bi)c=(a^2+b^2)c=-32$ なので
$(a^2+b^2,c)=(1,-32),(2,-16),(4,-8),(8,-4),(16,-2),(32,-1)$ に限定されます。

x^2 の係数部分は $(a+bi)+(a-bi)+c=2a+c=-8$ なので $a=-\dfrac{c}{2}-4$ です。
$(a,c)=(12,-32),(4,-16),(0,-8),(-2,-4),(-3,-2),(-\frac{7}{2},-1)$
よって、条件を満たすのは $(a,b,c)=(-2,\pm 2,-4),(0,\pm 2,-8)$ です。

x の係数部分は $(a+bi)(a-bi)+(a+bi)c+(a-bi)c=a^2+b^2+2ac=16-k$ なので
$k=16-(a^2+b^2+2ac)$ です。

$(a,b,c)=(-2,\pm 2,-4)$ のとき $k=16-(4+4+16)=-8$ です。
$(a,b,c)=(0,\pm 2,-8)$ のとき $k=16-(0+4+0)=12$ です。

以上より $k=-8,\ 12$ です。