

2022年神戸大学理科系問題 5

$a, b$  は  $1 < a < b$  を満たす実数、 $p$  は素数です。

$a^m = b^n = (ab)^p$  を満たす自然数の組  $(m, n)$  を  $p$  を用いて表してください。

## 解説・解答

$m, n$  は自然数、 $1 < a < b$  で  $a^m = b^n$  なので  $m > n \geq 1$  です。

対数をとり  $m \log_{10} a = n \log_{10} b = p \log_{10}(ab) = k > 0$  と置きます。

$\frac{k}{p} = \log_{10}(ab) = \log_{10} a + \log_{10} b = \frac{k}{m} + \frac{k}{n}$  なので  $\frac{1}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  です。

両辺に  $mnp$  を掛けて  $mn = np + mp$  式変形して  $(m-p)(n-p) = p^2$  にします。  
 $p$  は素数、 $m-p > n-p$  なので  $(m-p, n-p) = (p^2, 1)$  です。

以上より  $(m, n) = (p^2 + p, p + 1)$  です。