

2022年神戸大学理科系問題 5

a, b は $1 < a < b$ を満たす実数、 p は素数です。

$a^m = b^n = (ab)^p$ を満たす自然数の組 (m, n) を p を用いて表してください。

解説・解答

m, n は自然数、 $1 < a < b$ で $a^m = b^n$ なので $m > n \geq 1$ です。

対数をとって $m \log_{10} a = n \log_{10} b = p \log_{10}(ab) = k > 0$ と置きます。

$$\frac{k}{p} = \log_{10}(ab) = \log_{10} a + \log_{10} b = \frac{k}{m} + \frac{k}{n} \text{ なので } \frac{1}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \text{ です。}$$

両辺に mnp を掛けて $mn = np + mp$ 式変形して $(m-p)(n-p) = p^2$ にします。
 p は素数、 $m-p > n-p$ なので $(m-p, n-p) = (p^2, 1)$ です。

以上より $(m, n) = (p^2 + p, p + 1)$ です。