2022 年神戸大学理科系問題 *1*

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。
極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めてください。

解説・解答

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}a_n}\ (n=1,2,3,\cdots)$ より任意の自然数 n で $a_n>0$ です。

$a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_{n+1}a_n}\sqrt{a_{n+1}}=a_{n+1}\sqrt{a_n}$ なので
$a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}}=a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_n\sqrt{a_{n-1}}=\cdots=a_2\sqrt{a_1}=2\cdot\sqrt{1}=2$ です。
よって $a_{n+1}\sqrt{a_n}=2$ です。

両辺の対数をとります。$\log a_{n+1}+\dfrac{\log a_n}{2}=\log 2$ です。

$\log a_{n+1}-\dfrac{2\log 2}{3}=\dfrac{1}{2}\left(\log a_n-\dfrac{2\log 2}{3}\right)$ に式変形できるので

$\log a_n-\dfrac{2\log 2}{3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\log a_1-\dfrac{2\log 2}{3}\right)$ です。

よって $\log a_n=\dfrac{2\log 2}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ です。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\log 2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2\log 2}{3}=\log 2^{\frac{2}{3}}$ です。

以上より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$ です。