2022 年関西大学文系問題 2

$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ での $\dfrac{2\sin\theta + 4\cos\theta + 5}{\sin\theta + \cos\theta + 1}$ の最小値を求めてください。

解説・解答

$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ と置きます。

$1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ より $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{1+t^2}$ です。

$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{2}{1+t^2}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$$\frac{2\sin\theta+4\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}$$

$$=\frac{2\frac{2t}{1+t^2}+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}$$

$$=\frac{t^2+4t+5}{2t+2} \qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \text{ より } t+1>0\right)$$

$$=1+\frac{t+1}{2}+\frac{3}{t+1} \qquad (\text{相加平均・相乗平均の関係を使う})$$

$$\geqq 1+2\sqrt{\frac{t+1}{2}\cdot\frac{3}{t+1}} \qquad (t+1=\sqrt{6} \text{ のとき等号成立})$$

$$=1+\sqrt{6}$$

以上より、最小値は $1+\sqrt{6}$ です。