

2022年関西学院大学理系問題 1

ベクトル \vec{a}, \vec{b} は $|\vec{a}| = \sqrt{10}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{17}$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{26}$ を満たします。
 t が実数全体を動くとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値に最も近い整数を求めてください。

解説・解答

$$17 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 10 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \text{ より} \\ |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \text{ です。}$$

$$26 = |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 10 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \text{ より} \\ |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \text{ です。}$$

$$|\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \text{ と } |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \text{ より} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, |\vec{b}|^2 = 5 \text{ です。}$$

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 = 5t^2 + 2t + 10 = 5\left(t + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{5} \text{ なので} \\ |\vec{a} + t\vec{b}|^2 \text{ は } t = -\frac{1}{5} \text{ のときに最小値 } \frac{49}{5} = 9.8 \text{ です。}$$

$$9.61 = 3.1^2 < 9.8 < 3.2^2 = 10.24 \text{ なので} \\ |\vec{a} + t\vec{b}| \text{ の最小値に最も近い整数は } 3 \text{ です。}$$