2022 年関西学院大学文系問題 2

等差数列 $\{a_n\}$ は $a_1+a_2=7$，$a_1+a_3+a_5=24$ を満たします。
等比数列 $\{b_n\}$ の公比は実数であり、
$b_1+b_2+b_3=7$，$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=63$ を満たします。
$S_n=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n$ を計算してください。

解説・解答

$a_n = an + b$ と置きます。
$a_1 + a_2 = 3a + 2b = 7$，$a_1 + a_3 + a_5 = 9a + 3b = 24$ より
$a = 3$，$b = -1$ なので $a_n = 3n - 1$ です。

$b_n = cr^{n-1}$ (r は実数) と置きます。
$b_1 + b_2 + b_3 = c + cr + cr^2 = c(1 + r + r^2) = 7$
$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = c(1 + r + r^2) + c(1 + r + r^2)r^3 = 7 + 7r^3 = 63$ より
$r = 2$，$c = 1$ なので $b_n = 2^{n-1}$ です。

$$\begin{aligned}
S_n = 2S_n - S_n &= 2\sum_{j=1}^{n}(3j-1)\cdot 2^{j-1} - \sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{k-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\{3(j+1)-4\}\cdot 2^{(j+1)-1} - \sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1}(3k-4)\cdot 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 2^{k-1} \\
&= -2 + \sum_{k=2}^{n}\{(3k-4)-(3k-1)\}\cdot 2^{k-1} + (3n-1)\cdot 2^n \\
&= -2 - \sum_{k=2}^{n} 3\cdot 2^{k-1} + (3n-1)\cdot 2^n \\
&= -2 - \frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1} + (3n-1)\cdot 2^n \\
&= (3n-4)\cdot 2^n + 4
\end{aligned}$$