2022 年関西学院大学文系問題 2

k は正の実数、ω は方程式 $x^3-1=0$ の虚数解の 1 つです。
方程式 $x^3-(2a+1)x^2-3(a-1)x-a+5=0$ が
$x=k+\omega$ を解にもつような実数 a の値を求めてください。

解説・解答

$x^3-(2a+1)x^2-3(a-1)x-a+5=(x+1)\{x^2-2(a+1)x-a+5\}=0$ なので
$x^2-2(a+1)x-a+5=0$ の解が $x=k+\omega,\ k+\overline{\omega}$ です。

解と係数の関係を使います。
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ より $\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$ です。
$2(a+1)=(k+\omega)+(k+\overline{\omega})=2k+(\omega+\overline{\omega})=2k-1$ より $a=k-\frac{3}{2}$ です。
$-a+5=(k+\omega)(k+\overline{\omega})=k^2+(\omega+\overline{\omega})k+\omega\overline{\omega}=k^2-k+1$ より $a=-k^2+k+4$ です。

$k-\frac{3}{2}=-k^2+k+4$ より $k^2=\frac{11}{2}$ です。k は正の実数なので $k=\frac{\sqrt{22}}{2}$ です。
よって $a=k-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{22}-3}{2}$ です。