

2022年関西学院大学文系問題 1

方程式  $x(|x| - 4) + a = 0$  が異なる 3 個の実数解  $\alpha, \beta, \gamma$  を持ち、  
 $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{1}{2}$  となる実数  $a$  の値を求めてください。

## 解説・解答

$4 < a$  のとき

$0 \leq x$  では  $x^2 - 4x + 4 = 0$  の判別式  $D/4 = 4 - a < 0$  なので実数解を持ちません。

$x \leq 0$  では  $-x^2 - 4x + 4 = 0$  の実数解  $x = -2 - \sqrt{4+a}$  です。

実数解は 1 個だけです。

$0 \leq a \leq 4$  のとき

$0 \leq x$  では  $x^2 - 4x + a = 0$  の実数解  $x = 2 \pm \sqrt{4-a}$  ( $a = 4$  のときは重解) です。

$x \leq 0$  では  $-x^2 - 4x + a = 0$  の実数解  $x = -2 - \sqrt{4+a}$  です。

$$(2 - \sqrt{4-a}) + (2 + \sqrt{4-a}) + (-2 - \sqrt{4+a}) = -\frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\sqrt{4+a} = \frac{5}{2} \text{ なので } a = \frac{9}{4} \text{ です。}$$

$-4 \leq a < 0$  のとき

$0 \leq x$  では  $x^2 - 4x + a = 0$  の実数解  $x = 2 + \sqrt{4-a}$  です。

$x \leq 0$  では  $-x^2 - 4x + a = 0$  の実数解  $x = -2 \pm \sqrt{4+a}$  ( $a = -4$  のときは重解) です。

$$(2 + \sqrt{4-a}) + (-2 - \sqrt{4+a}) + (-2 + \sqrt{4+a}) = -\frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\sqrt{4-a} = \frac{3}{2} \text{ ですが } \sqrt{4-a} > \sqrt{4-0} = 2 > \frac{3}{2} \text{ なので条件を満たす } a \text{ はありません。}$$

$a < -4$  のとき

$0 \leq x$  では  $x^2 - 4x - 4 = 0$  の実数解  $x = 2 + \sqrt{4-a}$  です。

$x \leq 0$  では  $-x^2 - 4x - 4 = 0$  の判別式  $D/4 = 4 + a < 0$  なので実数解を持ちません。

実数解は 1 個だけです。

以上より  $a = \frac{9}{4}$  です。