2022 年慶應義塾大学総合政策学部問題 *1*

実数 x に対して、x 以下の最大の整数を $[\,x\,]$ と表します。
数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \left[\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}\right]$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。
値が 10 以下である項の総和を求めてください。

解説・解答

k を整数として $a_n = \left[\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}\right] = k$ とします。

$\sqrt{2n} + \dfrac{1}{2}$ 以下の最大の整数が k なので $k \leqq \sqrt{2n} + \dfrac{1}{2} < k+1$ です。

$$\frac{(k-1)k}{2} + \frac{1}{8} = \frac{(k-\frac{1}{2})^2}{2} \leqq n < \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{1}{8}$$

$n, \dfrac{(k-1)k}{2}, \dfrac{k(k+1)}{2}$ は整数なので $\dfrac{(k-1)k}{2} + 1 \leqq n \leqq \dfrac{k(k+1)}{2}$ です。

$a_n = k$ を満たすものは $\dfrac{k(k+1)}{2} - \left\{\dfrac{(k-1)k}{2} + 1\right\} + 1 = k$ 項あり、
その k 項の和は $k \cdot k = k^2$ です。

以上より 10 以下の項の総和は $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$ です。