2022 年慶應義塾大学経済学部問題 5

a は 2 以上の整数, p は整数, $s=2^{2p+1}$ です。
実数 x,y が等式 $2^{a+1}\log_2 3^x+2x\log_2\dfrac{1}{3^x}=\log_s 9^y$ を満たすとき
y を x の関数として表したものを $y=f(x)$ とします。
$0\leqq x\leqq 2^{a+1}$ で $f(x)$ の最大値が 2^{3a} 以下となる p の最大値・最小値を求めてください。

解説・解答

$\log_s 9^y = 2^{a+1}\log_2 3^x + 2x\log_2 \dfrac{1}{3^x}$

対数の底を 2 に揃えて $\dfrac{\log_2 3^{2y}}{\log_2 2^{2p+1}} = 2^{a+1}\log_2 3^x + 2x\log_2 3^{-x}$

指数部分を対数の前に出して $\dfrac{2y\log_2 3}{2p+1} = 2^{a+1}x\log_2 3 - 2x^2\log_2 3$

両辺に $\dfrac{2p+1}{2\log_2 3}$ を掛けて $y = (2p+1)(2^a x - x^2)$ です。

よって $f(x) = (2p+1)(2^a x - x^2) = -(2p+1)\left\{(x-2^{a-1})^2 - 2^{2a-2}\right\}$ です。

$2p+1<0$ のとき $p \leqq -1$ であり $y=f(x)$ は下に凸な放物線です。
$0 \leqq x \leqq 2^{a+1}$で頂点の x 座標 2^{a-1} から最も離れた x の処で最大になるので
最大値 $f(2^{a+1}) = (2p+1)(2^a \cdot 2^{a+1} - 2^{2(a+1)}) = -(2p+1)2^{2a+1}$ です。
最大値が 2^{3a}以下なので $-(2p+1)2^{2a+1} \leqq 2^{3a}$ より $p \geqq -2^{a-2} - \frac{1}{2}$ です。
p は整数なので $-2^{a-2} \leqq p \leqq -1$ です。

$2p+1>0$ のとき $p \geqq 0$ であり $y=f(x)$ は上に凸な放物線です。
$0 \leqq x \leqq 2^{a+1}$に頂点の x 座標 2^{a-1} を含むから頂点で最大になるので
最大値 $f(2^{a-1}) = (2p+1)2^{2a-2}$ です。
最大値が 2^{3a}以下なので $(2p+1)2^{2a-2} \leqq 2^{3a}$ より $p \leqq 2^{a+1} - \frac{1}{2}$ です。
p は整数なので $0 \leqq p \leqq 2^{a+1}-1$ です。

以上より、p の最大値 $2^{a+1}-1$，最小値 -2^{a-2} です。