2022 年慶應義塾大学経済学部問題 *2*

数列 $\{a_n\}$ は $a_1=2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$, $\quad a_{n+1}=-|a_n|-\dfrac{a_n}{2}+5 \quad (n=1,2,3,\cdots)$ を満たします。
$a_n<0$ となる最小の n を m とします。
自然数 k が $2k \geqq m$ をみたすとき a_{2k} を求めてください。

解説・解答

$n < m$ のとき
$a_n \geqq 0$ なので $a_{n+1} = -|a_n| - \dfrac{a_n}{2} + 5 = -\dfrac{3a_n}{2} + 5$ です。
$a_{n+1} - 2 = -\dfrac{3}{2}(a_n - 2)$ に式変形できるので
$a_n = \Big(a_1 - 2\Big)\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)^{n-1} + 2 = \Big(-\dfrac{3}{2}\Big)^{n-11} + 2$ です。

$a_m = \Big(-\dfrac{3}{2}\Big)^{m-11} + 2 < 0$ を満たす最小の自然数なので
$m = 14,\ a_{14} = -\dfrac{11}{8}$ です。

$-2 \leqq a_{14} \leqq -1$ です。
$-2 \leqq a_{2k} \leqq -1$ だとすれば
$a_{2k+1} = -|a_{2k}| - \dfrac{a_{2k}}{2} + 5 = \dfrac{a_{2k}}{2} + 5$ なので $4 \leqq a_{2k+1} \leqq \dfrac{9}{2}$ です。
$a_{2k+2} = -|a_{2k+1}| - \dfrac{a_{2k+1}}{2} + 5 = -\dfrac{3a_{2k+1}}{2} + 5$ なので $-2 \leqq -\dfrac{7}{4} \leqq a_{2k+1} \leqq -1$ です。
よって 7 以上の自然数 k で $-2 \leqq a_{2k} \leqq -1,\ 4 \leqq a_{2k+1} \leqq \dfrac{9}{2}$ です。

$2k \geqq m = 14$ のとき
$a_{2k+2} = -\dfrac{3a_{2k+1}}{2} + 5 = -\dfrac{3(\frac{a_{2k}}{2} + 5)}{2} + 5 = -\dfrac{3a_{2k}}{4} - \dfrac{5}{2}$
$a_{2(k+1)} + \dfrac{10}{7} = -\dfrac{3}{4}\Big(a_{2k} + \dfrac{10}{7}\Big)$ に式変形できるので
$a_{2k} = \Big(a_{14} + \dfrac{10}{7}\Big)\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)^{k-7} - \dfrac{10}{7} = \dfrac{3}{56}\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)^{k-7} - \dfrac{10}{7}$ です。