2022 年慶應義塾大学環境情報学部問題 2

$0 \leqq \theta < \pi$ で $f(\theta) = \sin 3\theta - 3\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right)$ の最大値・最小値を求めてください。

解説・解答

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sin 3\theta - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \sin\left\{3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos 3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \left\{4\cos^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\} - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= 4\cos^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 6\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

$x = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$ と置き $f(\theta) = 4x^3 - 6x = g(x)$ と置きます。

$0 \leqq \theta < \pi$ なので $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leqq 1$ です。

微分して $g'(x) = 12x^2 - 6 = 12\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 増減を調べます。

x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$g(x)$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	増加	$2\sqrt{2}$	減少	$-2\sqrt{2}$	増加	-2

$x = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$ なので $\theta = \frac{11\pi}{12}$ です。

$x = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$ なので $\theta = \frac{5\pi}{12}$ です。

以上より 最大値 $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}$, 最小値 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -2\sqrt{2}$ です。