2022 年慶應義塾大学医学部問題 *1*

α, β は $\alpha \neq 0$ を満たす実数です。
$f_1(x) = \alpha x + \beta, \quad f_{n+1}(x) = (f_n \circ f_1)(x)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき
1 次関数 $f_n(x)$ を求めてください。

解説・解答

$f_n(x) = a_n x + b_n$ $(a_1 = \alpha,\ b_1 = \beta)$ と置きます。
$(f_n \circ f_1)(x) = f_n(\alpha x + \beta) = a_n(\alpha x + \beta) + b_n = \alpha a_n x + (\beta a_n + b_n)$

$f_{n+1}(x) = (f_n \circ f_1)(x)$ より $a_{n+1} x + b_{n+1} = \alpha a_n x + (\beta a_n + b_n)$ です。
係数を比べて $a_{n+1} = \alpha a_n$, $b_{n+1} = \beta a_n + b_n$ です。

$\alpha = 1$ のとき $a_1 = \alpha = 1$
$a_{n+1} = \alpha a_n = a_n$ より $a_n = a_1 = 1$ です。
$b_{n+1} = \beta a_n + b_n = b_n + \beta$ より $b_n = b_1 + \beta(n-1) = \beta n$ です。

$\alpha \neq 1$ のとき
$a_{n+1} = \alpha a_n$ より $a_n = \alpha\alpha^{n-1} = \alpha^n$ です。
$b_{n+1} = \beta a_n + b_n$ より階差数列の公式を使います。
$n \geqq 2$ で $b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \beta a_k = \beta + \sum_{k=1}^{n-1} \beta \alpha^k = \beta + \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-1)}{\alpha-1} = \frac{\beta(\alpha^n-1)}{\alpha-1}$ です。
(この式は $n = 1$ でも成立しています。)

以上より $\alpha = 1$ のとき $f_n(x) = x + \beta n$
$\alpha \neq 1$ のとき $f_n(x) = \alpha^n x + \dfrac{\beta(\alpha^n-1)}{\alpha-1}$ です。