2022 年慶應義塾大学医学部問題 2

n は 4 以上の整数です。
袋 A に赤玉 1 個と白玉 $n-1$ 個が、袋 B に赤玉 2 個と白玉 $n-2$ 個が入っています。
袋 A, B から 1 玉ずつ取り出し入れ替えます。
3 回入れ替えた後、袋 A に赤玉が 3 個入っている確率を求めてください。

解説・解答

袋 A が赤玉 1 個, 白玉 $n-1$ 個のとき、袋 B は赤玉 2 個, 白玉 $n-2$ 個です。
袋 A が赤玉 2 個, 白玉 $n-2$ 個のとき、袋 B は赤玉 1 個, 白玉 $n-1$ 個です。
袋 A が赤玉 3 個, 白玉 $n-3$ 個のとき、袋 B は赤玉 0 個, 白玉 n 個です。

1 回の入れ換えで袋 A の赤玉が a 個から b 個になる確率を P_{ab} とします。

$$P_{10} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} = \frac{n-2}{n^2}, \quad P_{12} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2(n-1)}{n^2}, \quad P_{11} = 1 - (P_{10} + P_{12}) = \frac{n^2-3n+4}{n^2}$$

$$P_{21} = \frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{2(n-1)}{n^2}, \quad P_{23} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-2}{n^2}, \quad P_{22} = 1 - (P_{21} + P_{23}) = \frac{n^2-3n+4}{n^2}$$

$$P_{32} = \frac{3}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{3n}{n^2}, \qquad P_{33} = 1 - P_{32} = \frac{n^2-3n}{n^2}$$

3 回の入れ換えで袋 A の赤玉が 1 個$\rightarrow$ a 個$\rightarrow$ b 個$\rightarrow$ 3 個になる確率を P_{1ab3} とします。

$$P_{1123} = P_{11} \cdot P_{12} \cdot P_{23} = \frac{2(n-1)(n-2)(n^2-3n+4)}{n^6}$$

$$P_{1223} = P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{23} = \frac{2(n-1)(n-2)(n^2-3n+4)}{n^6}$$

$$P_{1233} = P_{12} \cdot P_{23} \cdot P_{33} = \frac{2(n-1)(n-2)(n^2-3n)}{n^6}$$

求める確率は $P_{1123} + P_{1223} + P_{1233} = \dfrac{2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+8)}{n^6}$ です。