2022 年一橋大学問題 5

　2 つの箱 A, B があり、A には赤玉 2 個と白玉 1 個が、B には赤玉 1 個と白玉 2 個が入っています。1 回目は無作為に選んだ箱から玉を 1 個取り出してもとに戻します。2 回目以降は前回取り出した玉が赤なら前と同じ箱から、白なら無作為に選んだ箱から玉を 1 個取り出してもとに戻します。n 回目に赤玉を取り出す確率を求めてください。

解説・解答

n 回目に箱 A を選ぶ確率を p_n とします。箱 B を選ぶ確率は $1-p_n$ です。

1 回目に A を選ぶ確率は $p_1=\dfrac{1}{2}$ です。

　$n+1$ 回目に A を選ぶのは、n 回目に A から赤玉の場合、A から白玉で A を選ぶ場合、B から白玉で A を選ぶ場合があるので
$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{2}{3}+p_n\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\left(1-p_n\right)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}$ です。

$p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)$ に変形できるので $p_n-\dfrac{2}{3}=\left(p_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ です。

よって $p_n=\dfrac{2}{3}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$ です。

n 回目に赤玉を取り出すのは
n 回目に A から赤玉の場合と B から赤玉の場合があるので、
求める確率は $p_n\cdot\dfrac{2}{3}+\left(1-p_n\right)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{9\cdot 2^n}$ です。