2022 年一橋大学問題 *1*

a, b, c, d は 0 以上の整数です。
$2^a 3^b + 2^c 3^d = 2022$ を満たす組 (a, b, c, d) を求めてください。

解説・解答

$a=c=0$ とのとき $3^b+3^d=2022=2\cdot 3\cdot 337$
$b\leqq d$ の場合 $3^b(1+3^{d-b})=2\cdot 3\cdot 337$ です。
　$1+3^{d-b}$ は 3 の倍数ではないので $b=1$ です。
　$3^d=2\cdot 3\cdot 337-3=3\cdot 673$ となり不適です。
$b\geqq d$ の場合も同様です。
よって a,c のどちらかは 1 以上です。

$a\geqq 1$ のとき $2^c3^d=2022-2^a3^b=2(3\cdot 337-2^{a-1}3^b)$
　2^c3^d は 2 の倍数、よって $c\geqq 1$ です。
$c\geqq 1$ のとき同様にして $a\geqq 1$ です。

$b=d=0$ のとき $2^a+2^c=2022=2\cdot 3\cdot 337$
$a\leqq c$ の場合 $2^a(1+2^{c-a})=2\cdot 3\cdot 337$ です。
　$c-a=0$ なら $2^a=3\cdot 337$ となり不適です。
　$c-a\geqq 1$ なら $1+2^{c-a}$ は 2 の倍数ではないので $a=1$ です。
　　　　　　　　$2^c=2\cdot 3\cdot 337-2=2^2\cdot 5\cdot 101$ となり不適です。
$a\geqq c$ の場合も同様です。
よって b,d のどちらかは 1 以上です。

$b\geqq 1$ のとき $2^c3^d=2022-2^a3^b=3(2\cdot 337-2^a3^{b-1})$
　2^c3^d は 3 の倍数、よって $d\geqq 1$ です。
$d\geqq 1$ のとき同様にして $b\geqq 1$ です。

以上より $2^{a-1}3^{b-1}+2^{c-1}3^{d-1}=337$ (a,b,c,d は 1 以上の整数) です。
337 は奇数なので $a-1,c-1$ のどちらかは 0、よって a,c のどちらかは 1 です。
$3^{b-1}<2^{a-1}3^{b-1}+2^{c-1}3^{d-1}=337<3^6=729$ なので $1\leqq b\leqq 6$ です。

$(a,b)=(1,1)$ のとき $2^{c-1}3^{d-1}=337-1=336=2^4\cdot 3\cdot 7$ です。
$(a,b)=(1,2)$ のとき $2^{c-1}3^{d-1}=337-3=334=2\cdot 167$ です。
$(a,b)=(1,3)$ のとき $2^{c-1}3^{d-1}=337-9=328=2^3\cdot 41$ です。
$(a,b)=(1,4)$ のとき $2^{c-1}3^{d-1}=337-27=310=2\cdot 5\cdot 31$ です。
$(a,b)=(1,5)$ のとき $2^{c-1}3^{d-1}=337-81=256=2^8$ より $(c,d)=(9,1)$ です。
$(a,b)=(1,6)$ のとき $2^{c-1}3^{d-1}=337-243=94=2\cdot 47$ です。

(a,b) と (c,d) は交換しても式の値は同じなので、
求める組は $(a,b,c,d)=(1,5,9,1),(9,1,1,5)$ です。