2022 年広島大学理系問題 5

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。
極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めてください。

解説・解答

$f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と置きます。$a_{n+1}=f(a_n)$
$f'(x)=\sqrt{2}^{\,x}\cdot\log\sqrt{2}>0$ より $y=f(x)$ のグラフは単調増加です。
$f''(x)=\sqrt{2}^{\,x}\cdot(\log\sqrt{2})^2>0$ より $y=f(x)$ のグラフは下に凸です。

$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフを考えれば、方程式 $x=\sqrt{2}^{\,x}$ の解は $x=2,4$ です。

$a_1=\sqrt{2}<2$ です。
自然数 k で $a_k<2$ とすれば $a_{k+1}=f(a_k)<f(2)=2$ です。
よって、数学的帰納法により全ての自然数 n で $a_n<2$ です。

$y=f(x)$ の点 $(2,2)$ での接線は $y=x\log 2+2-2\log 2$ です。
下に凸なので $y=f(x)$ のグラフは接線以上です。
よって $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}\geqq x\log 2+2-2\log 2$ です。
($x=2$ のとき等号成立)

$a_{n+1}=f(a_n)=\sqrt{2}^{\,a_n}>a_n\log 2+2-2\log 2$ です。
よって $0<2-a_{n+1}<(2-a_n)\log 2$ なので $0<2-a_n<(2-a_1)(\log 2)^{n-1}$ です。
ゆえに $2-(2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1}<a_n<2$ です。

$1<2<e$ なので $0<\log 2<1$ です。
$\lim_{n\to\infty}\left(2-(2-\sqrt{2})(\log 2)^{n-1}\right)=2$ です。

はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ です。