2022 年広島大学理系問題 *3*

数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a,\ c_2 = b,\ c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad (a, b$ は整数, $n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。c_{2022} が奇数ならば $a + b$ は奇数であることを示してください。

解説・解答

「c_{2022} が奇数ならば $a+b$ は奇数」の
対偶「$a+b$ が偶数ならば c_{2022} は偶数」を示せば良いです。

$a+b$ が偶数より $(a,b)=(偶数, 偶数), (奇数, 奇数)$ です。

$(a_1,a_2)=(a,b)=(偶数, 偶数)$ のとき
自然数 k で $(c_{2k-1},c_{2k})=(偶数, 偶数)$ だとすると
$c_{2k+1}=c_{2k}+c_{2k-1}=偶数+偶数=偶数$
$c_{2k+2}=c_{2k+1}+c_{2k}=偶数+偶数=偶数$
数学的帰納法により、任意の自然数 m で $(c_{2m-1},c_{2m})=(偶数, 偶数)$ です。
$2022=2\cdot 1011$ なので $c_{2022}=偶数$ です。

$(a_1,a_2)=(a,b)=(奇数, 奇数)$ のとき $a_3=c_1+c_2=a+b=偶数$
自然数 k で $(c_{3k-2},c_{3k-1},c_{3k})=(奇数, 奇数, 偶数)$ だとすると
$c_{3k+1}=c_{3k}+c_{k-1}=偶数+奇数=奇数$
$c_{3k+2}=c_{3k+1}+c_{3k}=奇数+偶数=奇数$
$c_{3k+3}=c_{3k+2}+c_{3k+1}=奇数+奇数=偶数$
数学的帰納法により、任意の自然数 m で $(c_{3m-2},c_{3m-1},c_{3m})=(奇数, 奇数, 偶数)$ です。
$2022=3\cdot 674$ なので $c_{2022}=偶数$ です。

以上より、c_{2022} が奇数ならば $a+b$ は奇数です。