2022 年北海道大学後期理系問題 *1*

$a^3+b^3+c^3-3abc=63\ (a \leqq b \leqq c)$ を満たす整数の組 (a,b,c) を求めてください。

解説・解答

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=63$
$x=a+b+c,\ y=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ と置きます。$xy=63=3^2\cdot 7$

$2y=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqq 0$
よって $y \geqq 0$ です。

$y=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=x^2-(3\text{の倍数})$ なので、
x が 3 の倍数なら y も 3 の倍数、x が 3 の倍数でないなら y も 3 の倍数ではないです。
よって $(x,y)=(3,21),(21,3)$ に限定されます。

$(x,y)=(3,21)$ のとき
$x=a+b+c=3$ より $a+b=3-c$ です。
$y=3^2-3(ab+bc+ca)=21$ より $ab=-(a+b)c-4=c^2-3c-4$ です。
a,b は t の二次方程式 $t^2+(c-3)t+(c^2-3c-4)=0$ の整数解です。
判別式 $D=(c-3)^2-4(c^2-3c-4)=3(c+2)(4-c)+1 \geqq 0$ より $-2 \leqq c \leqq 4$ です。
$a \leqq b \leqq c$ なので $3c \geqq a+b+c=3$、よって $c \geqq 1$ です。
$(c,a+b,ab)=(1,2,-6),(2,1,-6),(3,0,-4),(4,-1,0)$ に限定されます。
$a \leqq b \leqq c$ を満たすのは $(a,b,c)=(-2,2,3),(-1,0,4)$ だけです。

$(x,y)=(21,3)$ のとき
$x=a+b+c=21$ より $a+b=21-c$ です。
$y=21^2-3(ab+bc+ca)=3$ より $ab=-(a+b)c+146=c^2-21c+146$ です。
a,b は t の二次方程式 $t^2+(c-21)t+(c^2-21c+146)=0$ の整数解です。
判別式 $D=(c-21)^2-4(c^2-21c+146)=3(c-6)(8-c)+1 \geqq 0$ なので $6 \leqq c \leqq 8$ です。
$a \leqq b \leqq c$ なので $3c \geqq a+b+c=21$、よって $c \geqq 7$ です。
$(c,a+b,ab)=(7,14,48),(8,13,42)$ に限定されます。
$a \leqq b \leqq c$ を満たすのは $(a,b,c)=(6,7,8)$ だけです。

以上より $(a,b,c)=(-2,2,3),(-1,0,4),(6,7,8)$ です。