2022 年北海道大学理系問題 1

関数 $f(x)=|x(x-1)|+|(x-a)(x-b)|$ を考えます。
x が実数の範囲を動くとき $f(x)$ の最小値を m とします。
a,b が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ を満たして動くとき m の最大値を求めてください。

解説・解答

$x < 0$, $1 < x$ のとき
$f(x) = x(x-1) + (x-a)(x-b) = 2x^2 - (a+b+1)x + ab$
$f(x)$ は二次関数で、軸は $x = \frac{a+b+1}{4}$ です。$0 < \frac{1}{4} \leqq \frac{a+b+1}{4} \leqq \frac{3}{4} < 1$
$x < 0$ で $f(x)$ は減少なので $f(x) > f(0)$ です。
$1 < x$ で $f(x)$ は増加なので $f(1) < f(x)$ です。

$a \leqq x \leqq b$ のとき
$f(x) = -x(x-1) - (x-a)(x-b) = -2x^2 + (a+b+1)x - ab$
$f(x)$ は上に凸な二次関数なので、区間の両端のどちらかが一番小さな値です。
よって $f(a) \leqq f(x)$ または $f(x) \geqq f(b)$ です。

$0 \leqq x \leqq a$, $b \leqq x \leqq 1$ のとき
$f(x) = -x(x-1) + (x-a)(x-b) = (1-a-b)x + ab$
$f(x)$ は一次関数で傾き $1-a-b$ です。
$1-a-b \geqq 0$ のとき $f(x)$ は増加なので $f(0) \leqq f(a) \leqq f(b) \leqq f(1)$ です。
よって $m = f(0)$ です。
$1-a-b \leqq 0$ のとき $f(x)$ は減少なので $f(0) \geqq f(a) \geqq f(b) \geqq f(1)$ です。
よって $m = f(1)$ です。

相加平均・相乗平均の関係により
$1-a-b \geqq 0$ のとき $m = f(0) = ab \leqq (\frac{a+b}{2})^2 \leqq \frac{1}{4}$ ($a = b = \frac{1}{2}$ で等号成立)
$1-a-b \leqq 0$ のとき $m = f(1) = (1-a)(1-b) \leqq (\frac{2-a-b}{2})^2 \leqq \frac{1}{4}$ ($a = b = \frac{1}{2}$ で等号成立)

以上より m の最大値は $\frac{1}{4}$ です。