$2022$ 年北海道大学文系問題 $2$

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = -15,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{n}{5} - 2\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定めます。
$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ が最小となる自然数 $n$ を求めてください。

解説・解答

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{5} - 2$ なので階差数列の公式を使います。
$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{5} - 2\right) = -15 + \frac{n(n-1)}{2\cdot 5} - 2(n-1) = \frac{(n+5)(n-26)}{10}$$

(この式は $n=1$ でも成り立っています)

$n \geqq 2$ のとき $S_n - S_{n-1} = a_n = \dfrac{(n+5)(n-26)}{10}$ より
$n < 26$ で $S_n - S_{n-1} < 0,\quad n = 26$ で $S_n - S_{n-1} = 0,\quad n > 26$ で $S_n - S_{n-1} > 0$
よって $S_1 > S_2 > S_3 > \cdots > S_{25} = S_{26} < S_{27} < S_{28} < S_{29} < \cdots$ です。

以上より $n = 25,\ 26$ で $S_n$ は最小になります。