

2022年北海道大学文系問題 1

k は $|k| < 2$ を満たす実数の定数です。

x についての不等式 $x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1 \geq 0$ を解いてください。

解説・解答

x より k の方が次数が低いので、 k で整理して因数分解します。

$$\begin{aligned} & x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2-k+1)x - k + 1 \\ &= xk^2 - (2x^2+x+1)k + (x^3+x^2+x+1) \\ &= xk^2 - \{x(x+1) + (x^2+1)\}k + (x^2+1)(x+1) \\ &= \{xk - (x^2+1)\}\{k - (x+1)\} \\ &= (x^2 - kx + 1)(x - k + 1) \geqq 0 \end{aligned}$$

$|k| < 2$ なので $x^2 - kx + 1 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{4 - k^2}{4} > 0$ です。

よって $x - k + 1 \geqq 0$ です。

ゆえに $x \geqq k - 1$ です。